

Dante e la Quarta Dimensione

Stefano Spagocci
GACB





L'Astronomia Dantesca

- Vi sono numerosi riferimenti astronomici nella Divina Commedia.
- Dante menziona, tra l'altro, le costellazioni australi, la precessione degli equinozi, i cerchi massimi, le macchie lunari, le eclissi, le maree (causate dalla Luna), la sfericità della Terra.
- Nel seguito esamineremo però la cosmologia dantesca, mostrando come essa anticipi addirittura quella moderna.



Spazi n-Dimensionali

- Si pensa di solito che possano esistere solo spazi fino a 3 dimensioni, salvo ricordare vagamente che il tempo è la quarta dimensione.
- In realtà, quando un fenomeno dipende da n parametri, possiamo associargli una lista di n numeri e vedere questa lista come un punto nello spazio n -dimensionale.



Spazi n-Dimensionali

- Seguendo la geometria cartesiana, nel caso di meno di 3 dimensioni possiamo rappresentare graficamente punti e figure: per 4 o più dimensioni ciò non è possibile ma poco importa, matematicamente parlando.
- Possono esistere spazi (matematici) di qualsiasi numero di dimensioni (anche infinite) ma qui considereremo solo lo spazio quadridimensionale.



Spazi Quadridimensionali

- Consideriamo un evento che accada sulla Terra ad un dato tempo: possiamo etichettare l'evento con latitudine, longitudine, altezza sul livello del mare e tempo e si hanno dunque 4 dimensioni.
- Si ha così lo spazio-tempo trattato da Einstein: noi però considereremo uno spazio con coordinate x , y , z ed una dimensione addizionale che non è il tempo.



L'Ipersfera

- In uno spazio ad n dimensioni, una sfera di centro C e raggio R è semplicemente l'insieme di tutti i punti che hanno distanza dal centro C pari ad R .
- In dimensione 1, una sfera consta di due punti equidistanti dal centro. In dimensione 2, la sfera è il familiare cerchio. In dimensione 3, la sfera è quella che familiarmente conosciamo.



L'Ipersfera

- Matematicamente si può benissimo parlare di sfere di ogni dimensione (ipersfere), anche se non si possono disegnare.
- Un'ipersfera in 4 dimensioni è detta 3-sfera: sorprendentemente, le 3-sfere si possono rappresentare graficamente, come vedremo.

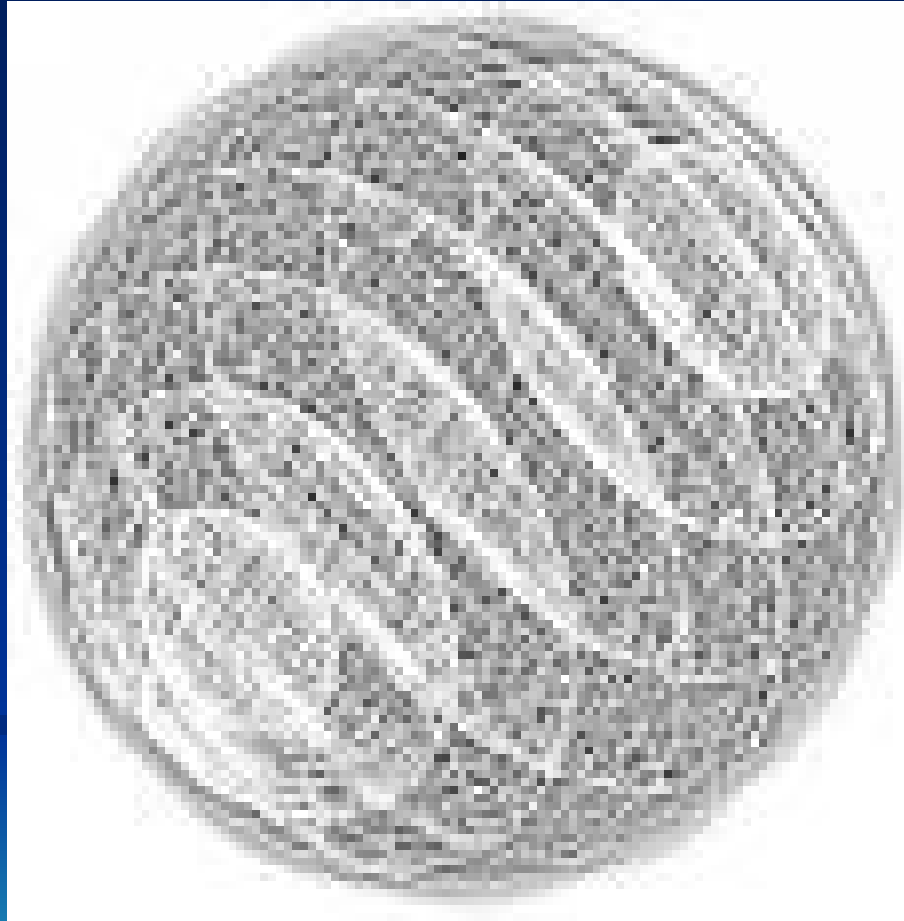


Metodo della Sezione

- Se sezioniamo una sfera ordinaria con un piano perpendicolare ad un suo diametro, otterremo dapprima un punto, poi cerchi di raggio crescente (finchè il raggio non è pari a quello della sfera), poi cerchi di dimensione decrescente e poi di nuovo un punto.



Metodo della Sezione



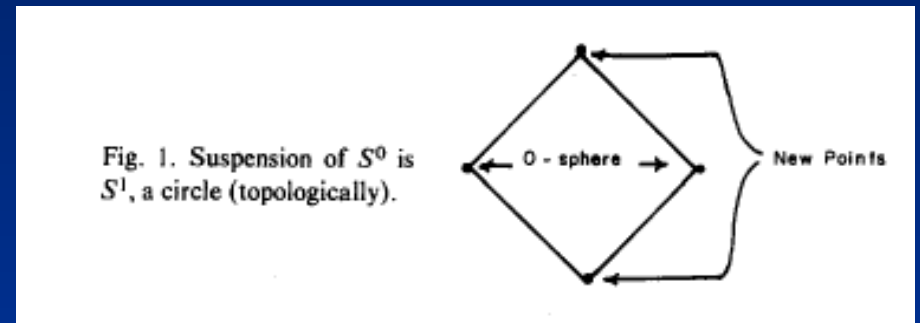
Metodo della Sezione

- Analogamente, se sezioniamo una 3-sfera, otterremo dapprima un punto, poi sfere (ordinarie) di raggio crescente (finchè il raggio non è pari a quello dell'ipersfera), poi sfere (ordinarie) di dimensione decrescente e poi di nuovo un punto.



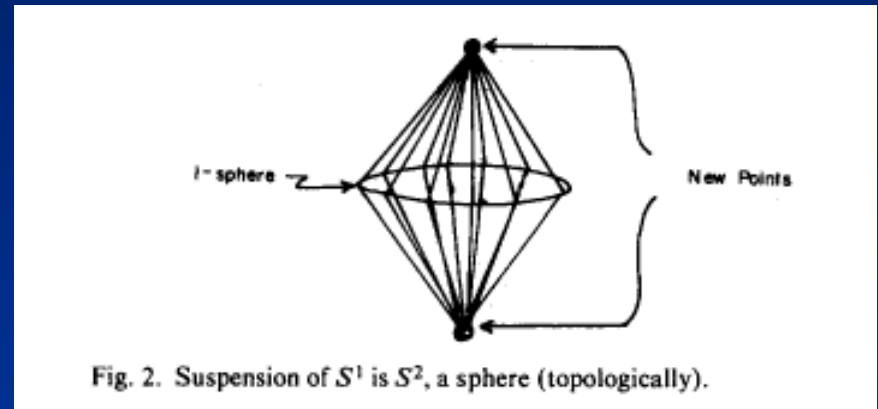
Metodo della Sospensione

- Sospendiamo una 0-sfera (due punti) per due nuovi punti: ne risulta una figura che, deformata, equivale ad un cerchio.
- Da una 0-sfera (due punti) abbiamo allora ottenuto, mediante sospensione, una 1-sfera (un cerchio).



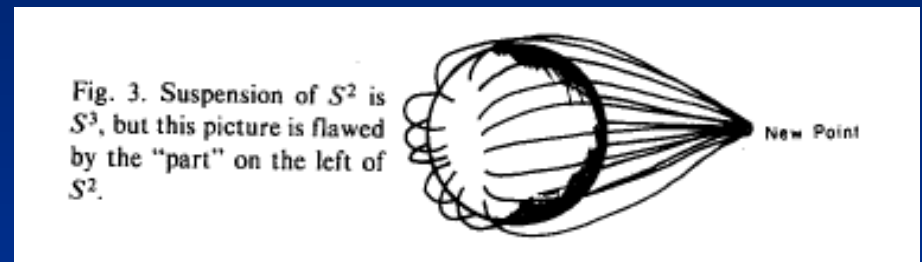
Metodo della Sospensione

- Sospendiamo una 1-sfera (cerchio) per due nuovi punti: ne risulta una figura che, deformata, equivale ad una sfera ordinaria.
- Da una 1-sfera (cerchio) abbiamo allora ottenuto, mediante sospensione, una 2-sfera (sfera ordinaria).



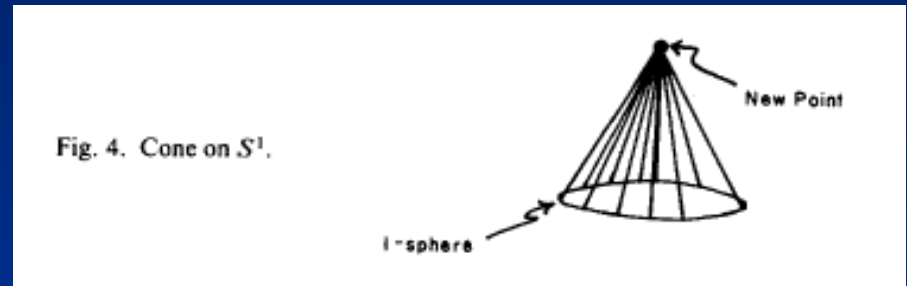
Metodo della Sospensione

- Analogamente possiamo sospendere una 2-sfera, per creare una 3-sfera.
- Poniamo uno dei due punti di sospensione all'interno della 2-sfera: la 3-sfera, nello spazio ordinario, apparirà come una palla tridimensionale più un punto, al quale la palla è sospesa.



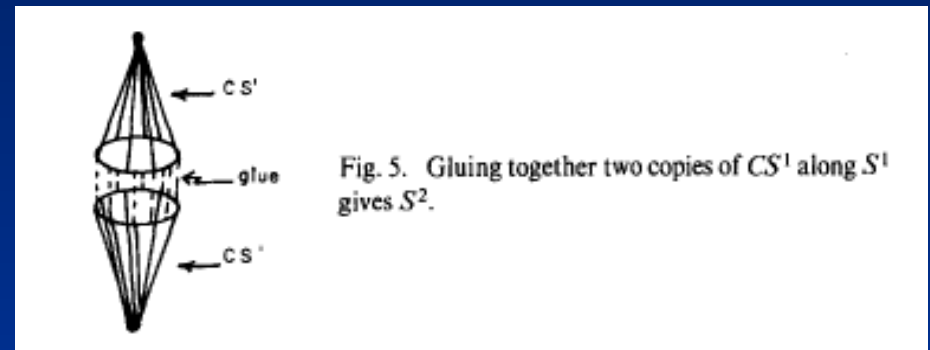
Metodo dei Coni

- Qui a destra è rappresentata la costruzione di un cono nell'ordinario spazio tridimensionale a partire da un cerchio, sospeso per un punto da noi scelto.



Metodo dei Coni

- Incolliamo poi 2 coni per il cerchio che fa loro da base: otterremo un figura che, deformata, equivale ad una sfera ordinaria.



Metodo dei Coni

- Analogamente, possiamo sospendere una sfera ordinaria per un punto da noi scelto, che può essere interno alla sfera stessa: otteniamo quella che si chiama una palla tridimensionale (ed è, in effetti, una palla).
- Come abbiamo ottenuto la sfera ordinaria (2-sfera), costruendo due coni a partire da cerchi (1-sfere) ed incollando le basi dei coni stessi, così possiamo costruire una 3-sfera.



Metodo dei Coni

- In particolare, partiamo da una 2-sfera (sfera ordinaria) e sospendiamo per un punto interno alla sfera stessa: come già visto, otterremo una palla tridimensionale, l'analogo del cono.
- Possiamo matematicamente “incollare” due iper-coni (due ordinarie palle tridimensionali), identificando come un unico punto due punti corrispondenti su ciascuno dei due iper-coni: otteniamo così un'ipersfera.



Una 3-Sfera

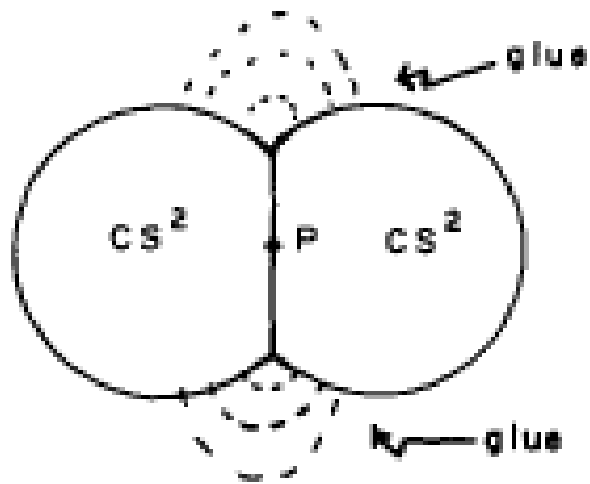
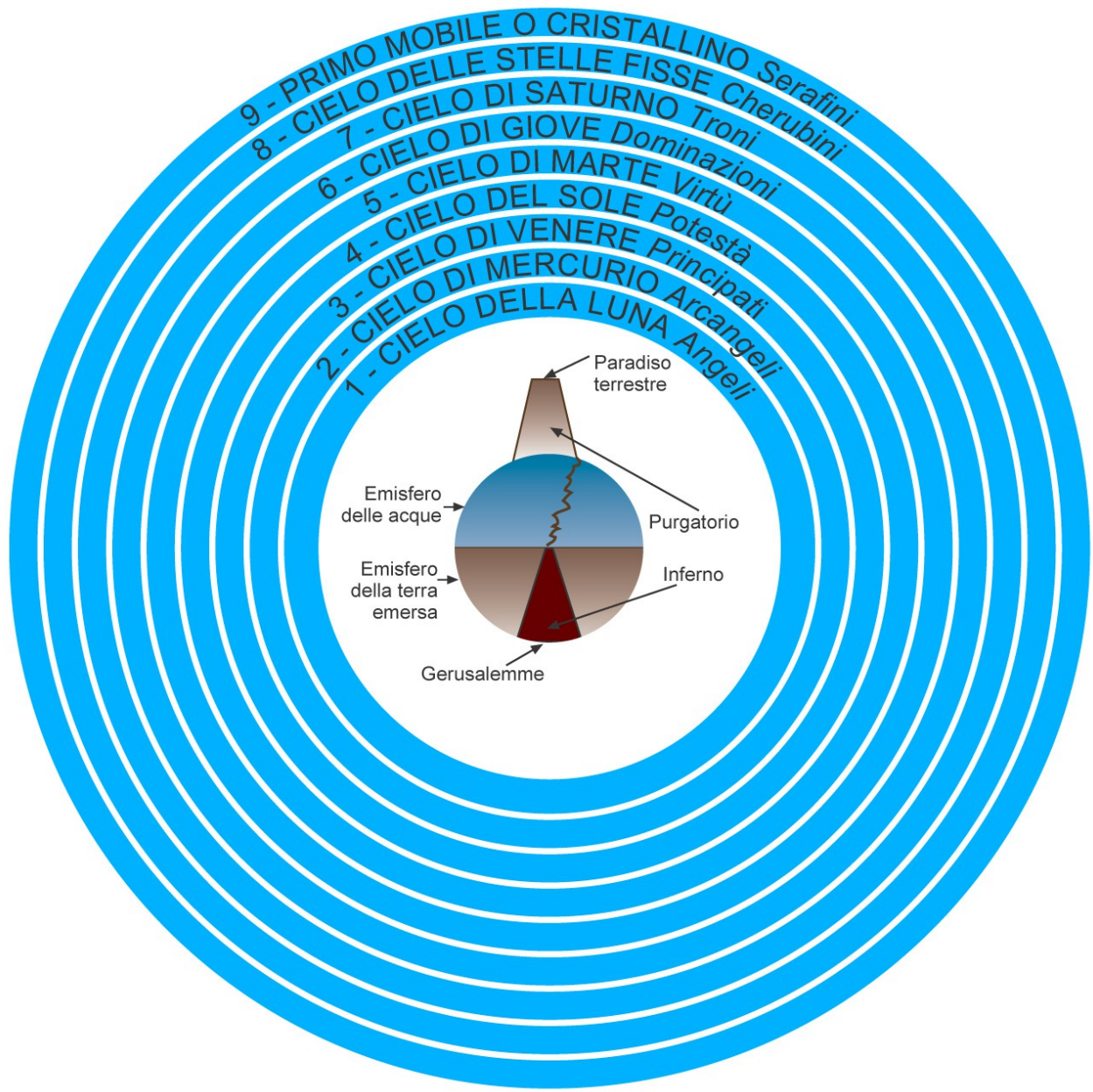


Fig. 6. Gluing together two copies of CS^2 along S^2 gives S^3 .



Dante e la 3-Sfera

- Dante cosa ha a che fare con tutto ciò? Vedremo che l'Universo di Dante è esattamente una 3-sfera (anche se Dante non lo sapeva).
- Per iniziare, nell'illustrazione precedente l'Empireo è sospeso, da qualche parte, sopra l'Universo ordinario.



Dante e la 3-Sfera

- Dante poi, fino al Primo Mobile, descrive il suo viaggio come se fosse all'interno delle sfere: nell'Empireo, invece, le sfere sono viste dall'esterno.
- L'Empireo, nella descrizione di Dante, circonda l'Universo fisico ma, contemporaneamente, è esterno ad esso: tutto ciò non è rappresentabile graficamente e ci fa pensare alla geometria non euclidea!



Dante e la 3-Sfera

- Per di più, l'Empireo è un guscio sferico che circonda l'Universo fisico ma, contemporaneamente, è la dimora di Dio, un punto senza dimensioni.
- Dunque si ha un confine che è contemporaneamente circonferenza e punto: un'altra situazione non rappresentabile graficamente e che ci fa pensare alla geometria non euclidea!



Dante e la Cosmologia

- L'averne un confine che contemporaneamente è punto e sfera è tipico della cosmologia moderna.
- Pensiamo infatti al guscio sferico più lontano che possiamo vedere: esso rappresenta l'istante osservabile più lontano nel tempo, cioè il Big Bang.
- Ma il Big Bang ebbe origine in un punto: abbiamo dunque l'analogo dell'Universo di Dante!



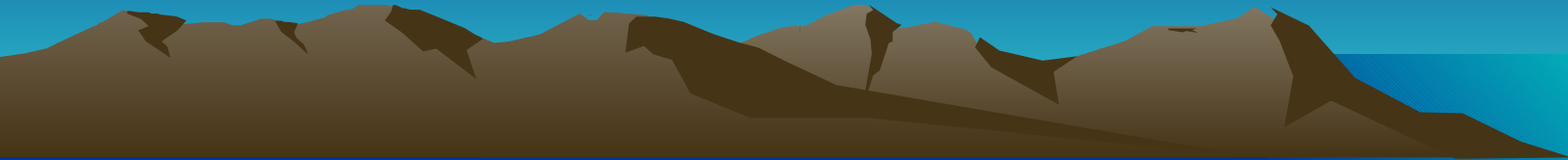
Universo Dantesco = 3-Sfera

- Cominciamo col metodo delle sezioni. Pensiamo ad uno spazio quadridimensionale in cui le coordinate siano le familiari x , y , z , più la velocità di rotazione delle sfere celesti.
- Dante ci dice che, nell'Universo fisico, più cresce il raggio delle sfere, più aumenta la velocità delle stesse. Nell'Empireo, invece, più diminuisce il raggio delle sfere, più aumenta la loro velocità.



Universo Dantesco = 3-Sfera

- Se facciamo quindi crescere la quarta dimensione (la velocità delle sfere), nell'Universo fisico il raggio cresce (la massima velocità è quella del Primo Mobile), nell'Empireo il raggio decresce (la massima velocità è quella della sfera angelica più vicina a Dio).
- Quindi stiamo esattamente sezionando una 3-sfera: l'Universo di Dante è, sorprendentemente, un'ipersfera!



Universo Dantesco = 3-Sfera

- Consideriamo ora il metodo della sospensione: Beatrice sostiene che l'Universo fisico “depende” da Dio.
- Dependere si può tradurre come “pende da” o, anche, “dipende da”.
- Quindi si ha una sfera (l'Universo fisico), sospesa ad un punto (Dio): ma questo è esattamente il metodo della sospensione per generare la 3-sfera!



Universo Dantesco = 3-Sfera

- Consideriamo il metodo dei coni: Beatrice fa notare la corrispondenza di ogni cielo dell'Universo fisico con ogni cielo dell'Empireo (tale corrispondenza è illustrata nella mappa dell'Universo dantesco mostrata prima).
- Si hanno allora due palle tridimensionali, le cui superfici sferiche hanno i punti messi in corrispondenza a due a due: ma questo è esattamente il metodo dei coni per la 3-sfera!



Universo Dantesco = 3-Sfera

- Facciamo infine notare che la 3-sfera, e l'Universo di Dante, sono finiti ma illimitati.
- Infatti, se ci muoviamo all'interno di una delle due sfere, prima o poi arriveremo al suo “bordo”. Ma i punti del “bordo” di una sfera sono identificati con i corrispondenti punti dell'altra sfera: entreremo quindi nell'altra sfera.
- La 3-sfera ha raggio limitato ma, se cammino a lungo, tornerò nel punto dal quale sono partito!



Conclusioni

- Non stiamo affermando che Dante comprendesse la geometria quadridimensionale e la cosmologia moderna: stiamo affermando che, di fatto, l'Universo di Dante è descritto da una 3-sfera e concorda benissimo con la cosmologia moderna.
- Ciò testimonia certamente la genialità di Dante ma c'è di più, sotto una tale stupefacente coincidenza.



Conclusioni

- Dante, certamente un genio, è però anche un uomo profondamente medievale ed il Medioevo, contrariamente a quanto spesso si ritiene, fu un'epoca estremamente razionale.
- I medievali erano abituati a conciliare razionalmente fatti dalla nostra mente occidentale spesso non conciliabili: estrema razionalità ed estrema fede, paganesimo e cristianesimo, Papato ed Impero.



Conclusioni

- Dante, medievale in tutto e per tutto, nella Divina Commedia (specialmente nei Canti XXVII e XXVIII) concilia aristotelismo e teologia cattolica, Universo finito ed Universo illimitato, confine sferico e confine puntiforme.
- Ne ricava una visione che, data la comune forma mentis, coincide perfettamente con i dettami della geometria quadridimensionale e della cosmologia moderna.

